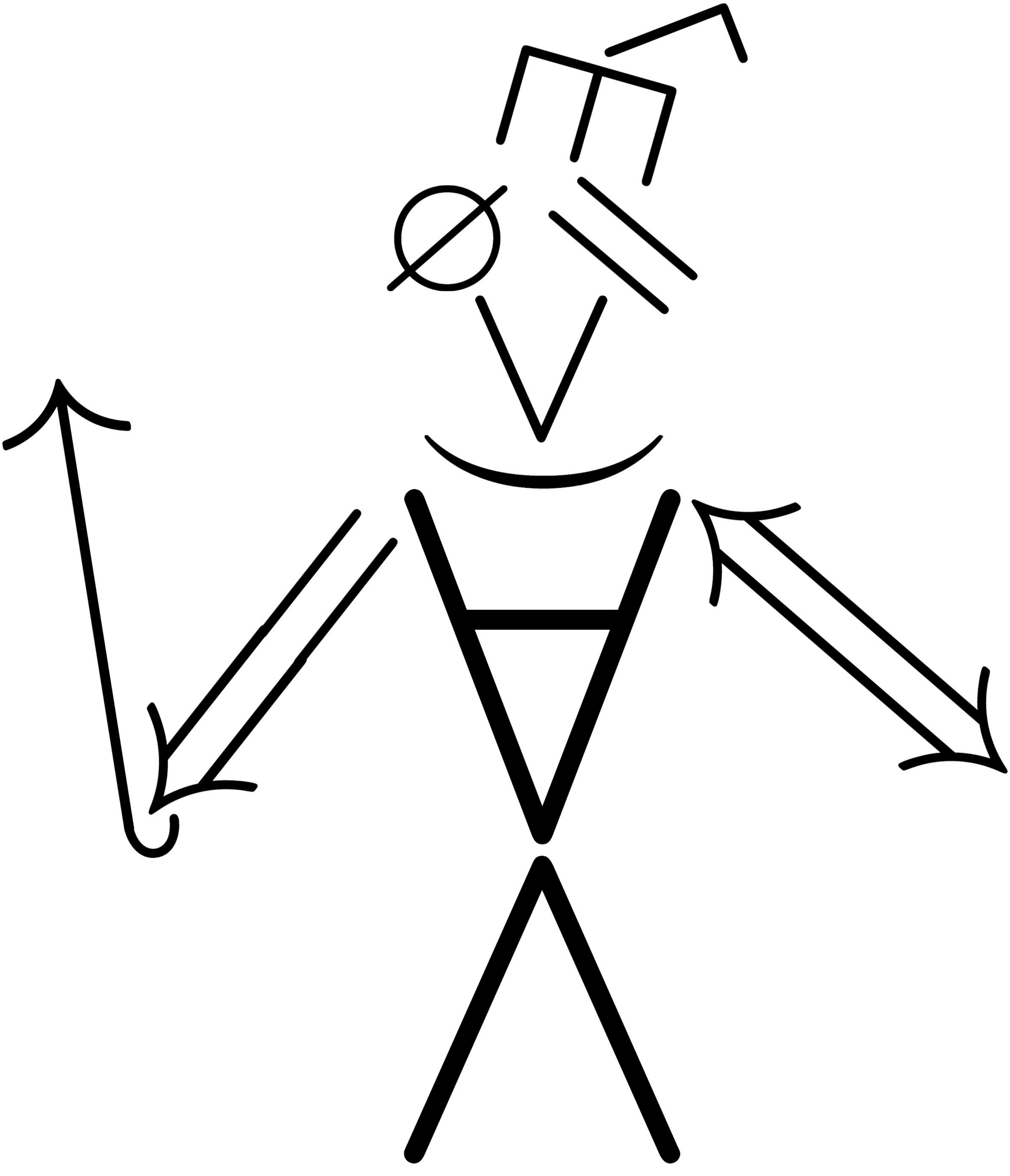
πkasle

ISSN 2174-9027

9. zenbakia
2013ko azaroa-abendua/2014ko urtarrila

Número 9
Noviembre-Diciembre 2013/Enero 2014



Aurkibidea *Índice*

Zenbaki honen kolaboratzaileak *Las y los colaboradores de este número*

Nahia Agirregoikoa
Maitane Amor
Josu Doncel
Antonio Gallastegui
Amaiur Holgado
Aitziber Ibañez
Txomin Zukalaregi

Haien laguntza eta lana gabe, ez zen posible izango zenbaki hau.
Sin su ayuda y trabajo, este número no hubiera sido posible.

Agradecimientos a Peter Neumann por la concesión de la entrevista.

Bilbon editatuta eta argitaratua. *Editado y publicado en Bilbao.*
This magazine is really thankful to every person who has contributed to LaTeX

Con el apoyo y la financión de:

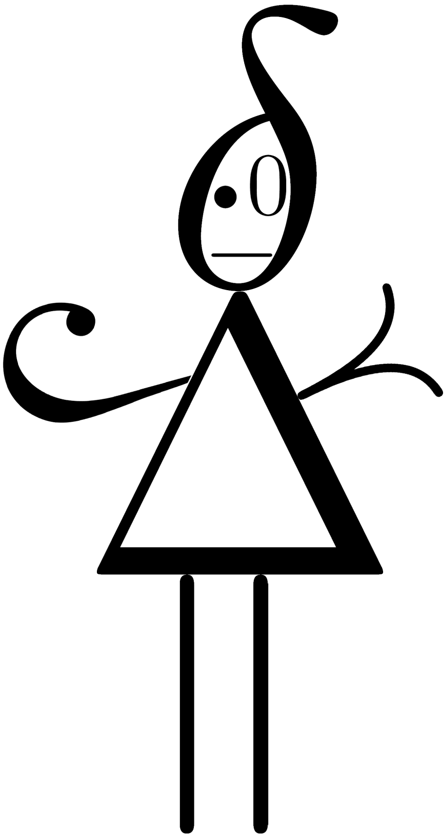
ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

UFI 11/52
Matemáticas y Aplicaciones

-ren sostengurekin eta finantziatzioarekin.

Sobre la portada

¿Qué es el monigote de la portada? ¿Y el monigote de debajo? ¿Qué representan? ¿Tienen algún sentido? Estas son algunas de las preguntas que puede estar planteándose nuestro lector o lectora tanto acerca de la imagen de la portada como de la imagen de esta columna y, en lo que sigue, se advierte de la rareza de las respuestas que van a darse a continuación.



La figura de la portada se llama *The Categoricist* y la de esta página *Doctor Delta* y cada una de ellas representa dos visiones opuestas de la matemática. Concretamente, *The Categoricist* representa la visión general, desde las nubes, de la matemática y *Doctor Delta* la visión concreta desde el suelo. Esto es, mientras *The Categoricist* busca elevarse lo suficiente para obtener una visión general y unificada que trivialice los problemas que afronta, *Doctor Delta* se encuentra cavando en la mina de los detalles para encontrar el filón con el que abordar los problemas con los que se encuentra.

Esto es, are you *The Categoricist* or *Doctor Delta*? O equivalentemente, ¿rodeas el problema o lo atacas directamente?

M4TEMOZIOA 2014

Figura 1: Cartel de M4TEMOZIOA 2014.

El próximo martes, 18 de febrero, se celebrará una conferencia del ciclo anual M4temozioa, organizado en colaboración por el Basque Center for Applied Mathematics (BCAM), la Cátedra de Cultura Científica de la UPV/EHU y la Alianza Tecnológica IK4. Este año, tendremos ocasión de disfrutar de una charla titulada *Ciegos ante el azar*, impartida por Jesús María Sanz-Serna, conocido investigador en matemáticas y especialista en integración geométrica. La conferencia tendrá lugar en el Bizkaia Aretoa de la UPV/EHU, a las 19:00 y es necesario inscribirse enviando un email a m4temozioa@bcamath.org.

Más información en: `http://www.bcamath.org/es/workshops/m4temozioa2014/general`

Jon Asier Bárcena, colaborador de πkasle, medalla de oro española en la OIMU

El pasado mes de noviembre se celebró la Olimpiada Iberoamericana Matemática Universitaria (OIMU), en la que en torno al 16 de noviembre se realizó una prueba escrita con diversos problemas a los alumnos y alumnas que se han presentado en sus respectivos centros. Varios estudiantes de la UPV/EHU participaron en esta competición, entre los cuales, nuestro colaborador Jon Asier Bárcena ha ganado la medalla de oro a nivel nacional. ¡Enhorabuena Jon Asier!

Más información sobre de esta competición en: `http://oimu.eventos.cimat.mx/`.

El Comité Organizador del AIMS2014 solicita voluntarias y voluntarios

Figura 2: Cartel de AIMS2014.

El Comité Organizador de la 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, que se celebra en Madrid del 7 al 11 de julio de 2014, invita y anima a participar como voluntarios en la organización de este congreso a estudiantes de matemáticas, física e ingeniería.

Este congreso se celebra cada dos años en distintos países, y será la primera vez que llegue a España. Esta edición contará con la participación de matemáticos tan famosos como Charles L. Fefferman (Princeton University) y Cédric Villani (Institut Henri Poincaré), entre otros.

Participar como voluntario en este evento científico es una experiencia única que además ofrece interesantes ventajas: los voluntarios están exentos de la cuota de inscripción y recibirán una gratificación por su colaboración. Además, las personas seleccionadas que estudien fuera de la Comunidad de Madrid recibirán un beca de alojamiento y manutención en un Colegio Mayor o residencia universitaria de Madrid durante la celebración del congreso, lo cual posibilita la participación desde cualquier punto de la península.

La dedicación durante el congreso será de media jornada diaria en actividades organizativas: apoyo en tareas de información, asistencia técnica en las salas de conferencias y comunicaciones o en las salas informáticas, etc. Durante el resto de la jornada los voluntarios podrán asistir libremente a las actividades del congreso.

Más información y la posibilidad de inscribirse en: `http://www.icmat.es/congresos/aims2014/volunteers.php`

Alan Turing indultado

Figura 3: Alan Turing.

El pasado 24 de diciembre, el indulto a Alan Turing –del que ya hablamos en el número anterior– fue aprobado definitivamente. El hecho de que se haya concedido el perdón oficial a Turing por el delito de homosexualidad es una gran noticia, aunque no está de más preguntarse qué sucede con las demás personas que a lo largo de la historia han sido acusadas del mismo delito y no han recibido el perdón. ¿Es necesario haber realizado hechos notables para que se conceda un perdón oficial? ¿No debería ser un derecho de toda persona?

π*kasle*n parte hartu eta artikulu bat zure izenean argitaratu nahi duzu?

Animatu zaitez!
Bidal iezaguzu zure artikulua `pikasle@gmail.com` helbidera!

Informazio gehiago www.pikasle.com webgunean.

¿Quieres colaborar con π*kasle* y publicar un artículo a tu nombre?

¡Anímate!
¡Mándanos tu artículo a `pikasle@gmail.com`!

Más información en www.pikasle.com.

 ISSN 2174-9027

#Kultura Zientifikoa 1. Jaialdia

Antonio Gallastegui

Irailaren 25ean, Twiterren egindako #KulturaZientifikoa ekimenari jarraipena emateko asmoz, Txoni Matxainek, bere blogetik, Twiterretik harago hedatzen den ekimen bat aurkeztu digu; #Kultura Zientifikoa 1. Jaialdia, hain zuzen. Kultura zientifikoaren jaialdi horrek 2014ko urtarrilaren 8tik martxoaren 31 arte iraungo du, eta ekitaldi irekia izango da. Pikasletik, ekimen horretan parte hartzera animatzen zaituztegu. Horretarako, zuen atxikimendua gehitu dezakezue, eta iritziak eta iradokizunak eman.

Jakintza-arlo guztien inguruko post, mezu edo artikuluak euskaraz idatzi, editatu, sareratu eta biltzeko ekimena da #KulturaZientifikoa 1. Jaialdia, eta landu eta idatzi ditugun iritziak edo ideiak partekatzera animatzen gaitu, kultura zientifikoaren gaineko ezagutza eta interesa interneten bidez zabaltzeko xedean.

Ekimen horrek, besteak beste, kultura zientifikoaz gozatzea eta kultura zientifikoa euskaraz jorratzen diharduten eragileen sarea sortzea ditu helburu, eta bai zientzia eta kultura zientifikoa hezkuntzan eta gizarte osoan indartzea, zientziaren eta beste alor batzuen arteko mugak gainditzea, eztabaia eta jarrera kritikoa sustatzea eta elkarlana bultzatzea ere.

Edonork parte har dezake: unibertsitate, batxilergo, DBH, LBHko eta euskaltegietako irakasleek zein ikasleek (euren irakasleen bitartez), ikertzaileek, dibulgatzaileek eta komunikatzaileek, erakundeek eta abarrek.

Parte hartzeko arauak eta informazio gehigarria ezagutzeko honako web-orri honetan sar zaitezkete: `http://zientziakaiera.com/2013/12/30/kulturazientifikoa-jaialdia-zientzia-kaieran/`.

Guztion artean, zabal dezakegu kultura zientifikoa euskaraz!

Antonio Gallastegui
Matematikako Lizentziako Ikaslea
UPV/EHU

Al acabar la carrera, ¿qué?

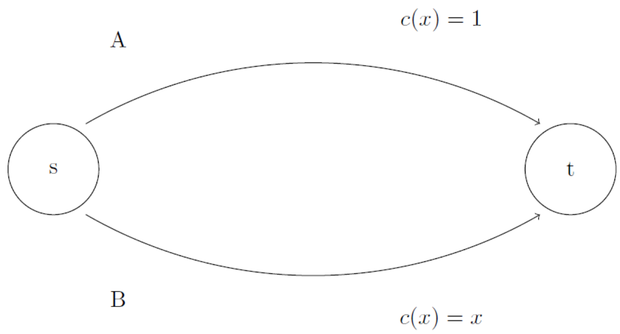
Josu Doncel

A medida que un estudiante llega a los últimos cursos de la carrera, la siguiente pregunta aparece de forma natural: ¿y qué hago yo al acabar? Ya sabéis que es mentira que un matemático puede trabajar solamente como investigador o profesor y que el abanico de posibilidades es mucho más amplio. Las matemáticas se usan, por ejemplo, en los teléfonos moviles con acceso a Internet. Por eso, hoy en día las empresas telefónicas necesitan gente formada para que esta tecnología siga en funcionamiento y desarrollo, es decir, necesitan y buscan matemáticos.

Me llamo Josu Doncel Vicente y soy un estudiante de doctorado en el LAAS[1], en Toulouse (Francia). Terminé los estudios de matemáticas en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU en el año 2010. Después de trabajar durante más de un año en el grupo de *Reconocimiento Automático del Habla* junto a M. I. Torres y R. Justo, decidí matricularme en el *Máster de Modelización Matemática, Estadística y Computación* de la UPV/EHU. Mi tesina de máster fue co-dirigida por U. Ayesta y P. Jacko, investigadores del centro de investigación *Basque Center for Applied Mathematics*. En enero de 2012, U. Ayesta empezó a trabajar en el LAAS. Allí, ha formado un grupo de estudiantes vascos que trabajan en matemática aplicada a las redes de telecomunicaciones, grupo del cual formo parte.

Ahora mismo estoy terminando mi segundo año de doctorado y principalmente lo que estudiamos es el comportamiento de las redes de telecomunicaciones. Para ello, combinamos el estudio de los modelos estocásticos clásicos (cadenas de Markov, teoría de colas...) junto con la teoría de juegos. La teoría de juegos es el área de la matemática aplicada que estudia las estrategias óptimas que puede seguir cada individuo, teniendo en cuenta las que pueden seguir los demás. Las redes de comunicación son sistemas distribuidos, es decir, son agentes independientes capaces de tomar sus propias decisiones para maximizar su propio rendimiento (por ejemplo, la compañía *A* toma unas decisiones para dar mejor servicio y la compañía *B* puede tomar otras, sin embargo, las dos usan la misma red). Por tanto, la teoría de juegos nos permite analizar y diseñar las redes de telecomunicaciones desde el punto de vista de las decisiones de sus agentes.

A continuación, voy a presentar una propiedad de las redes de telecomunicaciones que uso en mi doctorado. Imaginemos que quiero mandar un e-mail dividido en 20 paquetes de igual tamaño desde un ordenador s hasta un ordenador t. Para ello, tenemos dos posibles caminos A y B. Cada paquete que usa el camino A tarda un segundo en llegar al destino y cada paquete que usa el camino B tarda X segundos, donde X es la proporción de paquetes que están usando el camino B. Si quiero que mi mensaje se mande lo antes posible, lo que tengo que hacer es enviar la mitad por el camino A y la otra mitad por el B, es decir, diez paquetes por cada camino. El tiempo que tardará mi mensaje completo en llegar será: $10 \cdot 1 + 10 \cdot 0,5 = 15$ segundos. Sin embargo, si cada uno de los paquetes pudiese elegir el camino por el cual llegar lo antes posible al destino, todos los paquetes eligirían el camino B porque es más rápido dado que $X \leq 1$. En este otro caso, el tiempo que tardaría el mensaje será de $20 \cdot 1 = 20$ segundos, que es mayor que 15 segundos. Luego el ratio $20/15 = 4/3$ indica que la pérdida que se da cuando los paquetes toman decisiones individualmente con respecto a la solución óptima es del 33 %. Usando este ejemplo, en [1] y [2] los autores muestran que en cualquier red con funciones lineales, la mayor pérdida posible es del 33 %.



Para acabar, me gustaría decir que la investigación es una posibilidad para profundizar en un tema que durante la carrera a un alumno le haya resultado interesante. Además, te permite descubrir cosas que nadie antes

[1] *Laboratoire d´Analyse et d´Architecture des Systèmes* (LAAS) es un laboratorio del *Centre National de la Recherche Scientifique* (CNRS). [3]

había visto. Sin embargo, el hecho de que sean cosas desconocidas hasta el momento hace que a veces sea complicado su investigación y haya que dedicar mucho tiempo y esfuerzo para conseguirlo. Y tú, al acabar la carrera, ¿crees que la investigación es lo tuyo?

Referencias

[1] T. Roughgarden y E. Tardos. *How bad is selfish routing?*. **Journal of the ACM**. Vol. **49**. Issue **2**. March 2002. Págs. 236-259.

[2] A. Pigou. *The Economics of Welfare*. Macmillan. 1920.

[3] Página web del *Laboratoire d´Analyse et d´Architecture des Systèmes*. `www.laas.fr`

Josu Doncel
Licenciado en Matemáticas.
Estudiante de Doctorado
Laboratoire d'Analyze et d'Architecture des Systèmes

Interview with Peter Neumann

Por *Ricardo Grande* y *Josué Tonelli-Cueto*

Con motivo del Año de Galois, el matemático Peter Neumann vino a la UPV/EHU a impartir la conferencia de clausura con motivo de su trabajo historiográfico con los documentos originales del matemático francés. Hemos aprovechado la ocasión para entrevistarle y que pueda compartir su experiencia con nosotras y nosotros.

Figure 1: Peter Neumann (P) with his book.

You have a long career in Mathematics, could you tell us briefly what your work is centered on?

P: Most of my work has been in Group Theory and related paths of Algebra, Combinatorics and Logic, but mostly Group Theory and its history. I started in Group Theory when I was an undergraduate and I have been working on it ever since. A lot of my work is on permutation groups acting on sets, and in the last twenty years on Computational Group Theory: how to design algorithms that compute effectively with groups.

You grew up in a family of mathematicians, were you passionate about mathematics from an early age or did your parents influence you in some way?

P: I don't know… I don't think so. I think I was quite gifted, but I didn't know it. My teachers knew it, therefore probably my parents did, but as a child you don't really know your position.

I think my father always wanted us to be mathematicians, whereas my mother was much more relaxed about it. She had a much broader view, my father had a rather narrow view. We didn't talk mathematics very much, but I was surrounded by mathematics at home, so it was easy to be interested, because there were books and journals and so on.

What does a mathematician do when he retires? Does your brain ever stop working?

P: It certainly picks on my brain… For example, sometimes words elude me, I don't find words, words in French and in English…

But no, I'm continuing doing mathematics. Since retirement I have spent more time on History of Mathematics, because I did this big project on Galois that took three years to do, my first three years of retirement.

But I'm also teaching. After I had been retired for a year, the university asked me to return to a half-time position for four years, so this is my last year as a half-time lecturer.

Not many mathematicians do research in Pure Mathematics and History of Mathematics at the same time. How are these two subjects related?

That's a very difficult question to answer. Partly because it is purely personal. I became interested in reading the French mathematicians of the nineteenth century when I wrote my dissertation as a doctoral student. A few years later, when I went to America, I came across the collected works of Galois, and worked on them trying to understand what he said. And I didn't understand it then, it takes a long time to understand Galois. So I became interested in the history of my own subject partly because the problems that I was working on were problems that were posed in about 1870. And in about 1960, new techniques came along and I thought I could apply those to the old problems.

These are techniques of the twentieth century representation theory, so called modular representation theory. Classical representation theory was developed at the end of the nineteenth century – representing a group by matrices over the complex numbers – but in the 1960s, Richard Brauer had developed a wonderful theory of modular representation theory – representing a group by matrices over a finite field. And I found I could apply that to the problems which Émile Mathieu and Camille Jordan had essentially posed, implicitly if not explicitly, in 1860 and 1861.

So I got interested in understanding works they had written in the context of that time, which is very different from understanding what they had written in the context of our time. But of course, I had this baggage that I know the Group Theory of the present time, and that it superseded the older Group Theory, so that makes history both more difficult and more interesting.

Would you recommend knowing about history and not only pure mathematics?

P: Yes, I would. Knowing something about the history does help. Firstly to learn the mathematics, and secondly to appreciate what matters and what doesn't matter in the mathematics, to give a sense of perspective for the mathematics.

But working on history of mathematics, rather than merely knowing the context, needs a lot of time, a lot of patience and also some facility with languages. One also needs to be aware of historical context. I was not very good at history at school, so my knowledge of the French revolution or the rather turbulent times afterwards with the restoration of the monarchy and the restoration of the republic was very little.

I think a lot of mathematicians know enough about history of mathematics to be able to help out students by showing them the context: how did things develop, why did they get these names,. . . But one has to be careful.

For instance, in group theory, there is Lagrange's theorem in finite groups. People think that Lagrange stated and proved that theorem, but he didn't. What he stated and tried to prove – but his proof was wrong – is completely different from that. Over a period of seventy years it evolved by quite big steps into the theorem that we now called Lagrange's theorem. But that name was given to it a hundred years later by Jordan, in 1870. Lagrange was a great mathematician and the seeds of that theorem are in his work, but people say that he stated it and proved it, and he didn't. So one has to be careful.

Because of the bicentenary of the birth of Galois, you have collected, translated and commented his writings. What is your current view of his work?

P: He was an amazing genius. He could think in a different way from his contemporaries. And so his work is very very important in the history of mathematics, because he essentially invented modern algebra, the modern way of looking at algebra.

The term modern algebra is a twentieth century one, it really goes back to Van der Waerden's book, his textbook in two volumes *Moderne Algebra*, published in Germany in 1930 based on the lectures by Emmy Noether and Émile Artin, I think.

Modern algebra –the algebra of groups, rings, fields and vector spaces– developed out of Galois' ideas. Of course, Galois' ideas are very primitive, but he turned Algebra around.

For example, until Galois wrote his work, or until it was published in 1846, Algebra had meant numbers, letters, equations,. . . Galois deals with a collection of permutations. Now first of all, permutations had already been introduced by Cauchy in 1815, so that wasn't new. But putting them into a collection, and giving a name to a collection – a set–, was a completely new idea.

Set theory didn't come into mathematics until forty or fifty years later, with the work of Cantor's and Dedekind's, Dedekind writing about number theory and Cantor writing about numbers and real numbers. The whole idea of putting objects together into one entity, and giving that collection of objects a name is a very modern one. And Galois did that. Where did he get the idea from? I don't know, he just follows his instinct, I think. But it was a very difficult one for his contemporaries to understand.

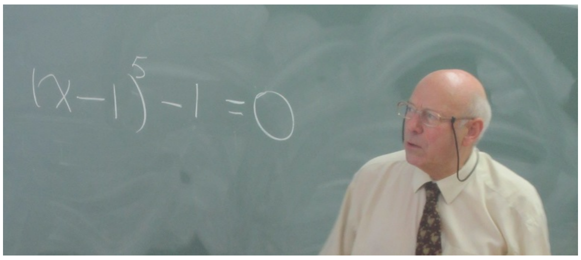


Figure 2: Peter Neumann during the conference.

The *Premier Mémoire* essentially introduces the whole of Galois theory, just like that, from nowhere. But also the published article *Sur la théorie des nombres*, which was published when he was eighteen, introduces finite fields, just from nowhere. He needed them for his work *Des équations primitives qui sont solubles par radicaux*. He just created them for himself.

It was many years until mathematicians caught up with his ideas. When it was published in 1830, it was ignored for many years, until it was republished by Liouville in 1846. In 1870, Jordan fully understood what was in there and put it into his great monograph *Traité des substitutions*. So Galois was a long way ahead of his time.

Once his work was published, Liouville tried to explain to the world what was in it. He found it too difficult to write a commentary, though he did give lectures on it in 1843 and 1844. A number of people started working on it: Betti in Italy, Dedekind in Germany, and then Kronecker in Germany, Jordan in France,... And it became understood. Reworked really, everybody reworked it because it was very difficult to understand. But it changed the direction of Algebra.

What motivated this effort of yours to translate and comment his work?

P: Well, I'd been interested in Galois for many years and when I retired I thought I would like to learn French. So we went to Paris and I thought that I should see if I could work on the Galois manuscript. It took me a long time to pluck up the courage to go to the library and ask to see the manuscript. But once I did I realized that this was a good project.

Originally I planned to work from the published editions and do a translation into English. But for historical purposes if you do a translation then you want the original side by side with it. In mathematics we don't need an edition of Galois' work for mathematicians. Mathematicians have taken Galois theory a long way beyond what was in there. So this edition was really for historians, and if you are working with historical sources, even a transcription from the manuscript to print is a secondary source. There has to be some interpretation on it, because you cannot represent faithfully on the page what you see in the manuscript.

For example, sometimes in the original work there are crossings out. How do you render something with all those crossings out? As soon as you try to render that in print you have had to do some interpretation, so it's no longer the primary source. It is close to the primary source, but it isn?t the primary source. And if you do a translation, then that is very much a secondary source.

So the translation wants to have the original language next to it, so that the reader can compare when necessary. For instance, as a historian, if you are reading a passage in the translation and you come across a phrase or a sentence that doesn't look right, you want to check. That's precisely why I wanted to put French and English side by side.

I was going to work with the great French edition of 1962 by Bourgne and Azra, but I knew already that there were some misprints in it, one or two things weren't quite right, so I wanted to check that against the manuscript. And once I did, I found many more mistakes, most of them very trivial, but it became clear that I should do a new transcription of the French as well as translating into English.

At first I started working with facsimiles, but there came a point when I couldn't quite see what writing was on top, so I asked if I could see the manuscript, and I was given special permission. I think I am the only other person in the world, other than French academicians, who has been allowed to see the original manuscripts. I tried to use them as little as possible, because they are very fragile, so I didn't want to put my fingers on them very much, but I did need to use them sometimes.

With all this background, what do you think is the role of Algebra, and particularly Group Theory, inside Mathematics?

P: That's a very good and a very difficult question to answer. As you know, Group Theory has become the subject that works with groups and entities, which we use to measure symmetry. And since we need to measure symmetry in many contexts, like Physics or Chemistry, groups have become important.

Also when teaching, it is common to teach the axiomatic of groups first and then describe the additive structure of the real numbers, rational numbers or complex numbers as being a group. So they are used for exposition now throughout mathematics in all sorts of different ways. Groups have taken on a life of their own completely different from what Galois had in mind.

What about its future?

P: The future of Group Theory has been changing since the classification of the finite simple groups was completed. It was announced in 1980, but there was a serious problem with the proof, which was corrected by Aschbacher and Smith in two books in 2004, I think. I believe that most of us in Group Theory are confident that the huge theorem classifying finite simple groups is now complete.

It has solved all the classical problems of group theory. And it is being used in Number Theory, in Geometry,... So there is plenty more to do.

When any area of mathematics becomes well worked, emphasis shifts to a different area of the subject. There is always more to do.

Thank you very much.

¿Cómo calcular la distancia a las estrellas?
El *paralaje*

Víctor Manero

Tal vez, en alguna ocasión, algunos de vosotros os hayaís planteado la siguiente pregunta: ¿cómo se las arreglan los científicos para medir la distancia a las estrellas? Una pregunta tan aparentemente inocente puede llevar a algún que otro quebradero de cabeza.

Claramente, medir distancias estelares es muy distinto a la idea de medir que usamos a diario. Al contrario de lo que ocurre con los objetos cotidianos, no podemos coger un metro, poner un lado en la tierra, ir hasta la estrella en cuestión y ver que distancia marca. En definitiva, no podemos acercarnos o alejarnos de una estrella a placer. Tampoco podemos enviar señales y esperar a ver cuanto tarda el efecto "eco" en devolverlas. Aún suponiendo que fuéramos capaces de medirlas a la vuelta, ¡¡¡el tiempo de espera podría ser casi eterno!!! Básicamente, la única información de la que disponemos para medir la distancia a una estrella es la luz que nos envía, pero ¿es suficiente información?

En este artículo explicaremos un método clásico (por supuesto no es el único) que se utiliza para hallar algunas distancias estelares. Dicho método recibe el nombre de *paralaje* y como vamos a ver tiene su fundamento en la geometría clásica.

El paralaje consiste en observar los desplazamientos que se producen en la posición aparente de las estrellas a medida que la tierra se mueve alrededor del Sol (ver Figura 1). Las estrellas más alejadas aparecen siempre "fijas" a lo largo de la órbita terrestre, mientras que las más cercanas sufren un desplazamiento que se puede medir.

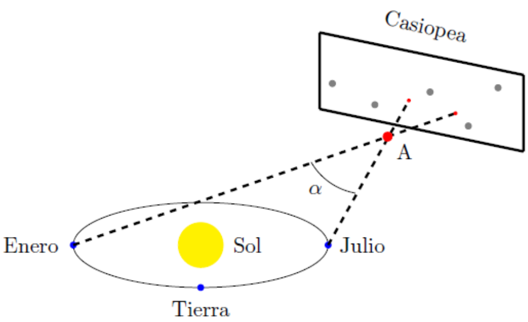


Figura 1: Movimiento aparente de la estrella A.

Vista desde la Tierra (ver Figura 2), la posición de la estrella A con respecto a la constelación de Casiopea varía entre enero y julio.

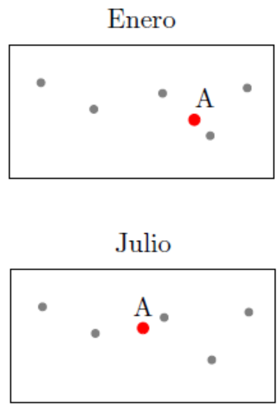


Figura 2: Visión de la estrella A desde la Tierra en los meses de enero y julio.

Así, el problema de calcular la distancia de la Tierra a la estrella A se plantea geométricamente como:

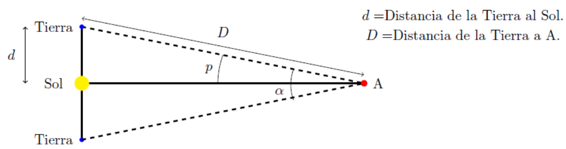


Figura 3: Representación esquemática del problema.

donde α es el ángulo descrito en la Figura 1 y p, que no es mas que $\frac{\alpha}{2}$, es el ángulo conocido como paralaje. Observando la Figura 3, sabemos por trigonometría que

$$sen(p) = \frac{d}{D}.$$

Por tanto, una vez medido el ángulo de paralaje p, y conocida la distancia de la Tierra al Sol, d, la distancia de la Tierra a la estrella A se obtiene como

$$D = \frac{d}{sen(p)}.$$

Al parecer, los griegos (que sabían bastante de geometría) fueron los primeros en estudiar el concepto de paralaje. Concretamente, Hiparco de Nicea (siglo II a.C.) hizo uso de lo que se conoce como paralaje lunar para medir el tamaño de la Luna. Estos resultados aparecen en su obra *Perí megethōn kaí apostēmátōn*, en castellano, *Sobre tamaños y distancias*. Sin embargo, los intentos de utilizar el paralaje para medir distancias estelares fueron en vano hasta el siglo XIX. Puesto que la distancia entre la Tierra y el Sol es tan "pequeña", (en comparación con la distancia entre el Sol y otras estrellas), el ángulo de paralaje era demasiado pequeño (ver Figura 4) para poder medirlo con aparatos de épocas anteriores.

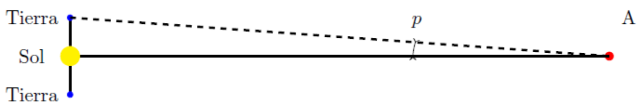


Figura 4: El ángulo del paralaje es muy pequeño.

Un hecho como este, que hoy se nos antoja fácilmente comprensible, no ha estado tan claro a lo largo de la historia. De hecho, tras publicar Copérnico su modelo heliocéntrico en el siglo XVI [1], muchos de los detractores de este modelo (que no fueron pocos) usaron la imposibilidad para medir el paralaje como un argumento en contra del heliocentrismo. Dicho argumento era sencillo: si la Tierra gira alrededor del Sol, se produce el fenómeno del paralaje y por tanto deberíamos ser capaces de medir un paralaje distinto de cero. Por el contrario, como todos los ángulos de paralaje medidos eran nulos parecía lógico pensar que era porque el fenómeno del paralaje no se producía, lo cúal, implicaba que la Tierra no podía girar alrededor del Sol. Sin embargo, en el año 1838 el matemático Friedrich Bessel (el de las funciones de Bessel) consiguió medir el primer paralaje distinto de cero para la estrella *61 Cygni* en la constelación del cisne. El valor medido por Bessel fue de 313,6 miliarcosegundos o lo que es lo mismo, un ángulo muy, muy, muy pequeño e imposible de distinguir de cero hasta entonces.

Como aplicación del fenómeno del paralaje se puede definir el *pársec*, una unidad de distancia muy utilizada en mediciones estelares. El pársec se define como la distancia del Sol a un punto Q de modo que su ángulo de paralaje sea de 1 segundo (ver Figura 5). Esta distancia equivale aproximadamente a 3,26 años-luz.

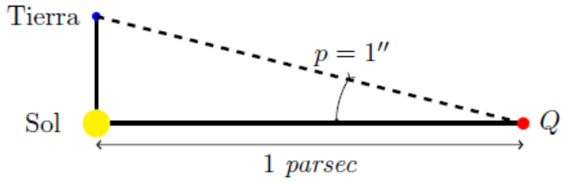


Figura 5: Definición del pársec.

Para concluir, quería hacer notar que el pársec, una unidad de medida que se puede considerar matemáticamente compleja ha sido utilizada en múltiples novelas y películas de ciencia ficción. Por mencionar un ejemplo, en la famosísima saga del cine de ciencia ficción: Star Wars, se hace referencia al pársec. Concretamente en el espisodio IV de la saga: "Una nueva esperanza"; Han Solo afirma que el Hálcon Milenario (la nave espacial en la cúal viajan los protagonistas) "hizo la carrera Kessel en menos de doce parsecs" [4]. Al parecer, los guionistas no debían de tener una idea clara de lo que era un pársec, ya que siendo una medida de distancia la utilizaron como una de tiempo. Este error de guión ha hecho que otros hagan referencias al pársec. Por ejemplo, en el capítulo *Blue Harvest* de la famosa serie estadounidense *Family guy*, uno de los personajes también menciona el pársec, pero en esta ocasión para hacer un chiste con el fallo de la saga Star Wars.

Referencias

[1] N. Copérnico. *De revolutionibus orbium coelestium*. Johannes Petreius. 1543. `http://ads.harvard.edu/books/1543droc.book/`

[2] C. Sagan. *Capítulo 10: El filo de la eternidad*. **Cosmos**. Editorial Planeta. 1980.

[3] Wikipedia, The Free Encyclopedia. `http://www.wikipedia.org/`

[4] *Star Wars Episode IV: A New Hope*. 20th Century Fox y Lucasfilm (1977).

Víctor Manero
Licenciado en Matemáticas por la U. de Zaragoza
Estudiante de doctorado
UPV/EHU

Fantasiazko Eraikinak (I)

Amaiur Holgado eta *Nahia Agirregoikoa*

Sarritan, eraikin batzuk ikustean, pentsatzen dugu eraikin horiek ametsetako eraikinak direla, fantasiazkoak, eta uste dugu bururatu orduko ekiten diotela arkitektoek lanari harik eta buruan duten eraikin hori lortu arte. Baina, nola lortu fantasiazko eraikin horiek lurrera ez erortzea? Bada, matematika dago horren guztiaren atzean; eraikin arkitektoniko guztiak, izan ere, geometrian oinarrituta daude.

Bi artikulutan, munduko eraikin ikusgarrienetariko batzuk aurkeztuko eta aztertuko ditugu, eta azalduko zer aplikazio duen matematikak eraikin horietariko bakoitzean. Aldizkariaren zenbaki honetan, Europa eta Ameriketara bidaiatuko dugu.

Tančící Dům (Etxe Dantzaria)

Nationale-Nederlanden (ING) banku holandarrak, Praga hirian eraikin deigarri bat eraikitzeko asmoz, Frank Gehry eta Vlado Milunic arkitektoak kontratatu zituen; eraikina enpresaren egoitza izango zen. Aurrekontu mugagabea eman zien, eta askatasun osoa, nahi zutena eraiki zezaten. Emaitza Tančící Dům deritzon eraikina izan zen. 1994. eta 1996. urteen artean eraiki zen, Pragako Jiráskuv zubiaren aurrean, eta arkitektoek "Fred and Ginger" izena eman zioten, Fred Astair eta Ginger Rogers dantzari ospetsuen omenez. Ezagunagoa da, hala ere, Etxe Dantzaria izenaz.


Arkitektoek bi pertsonaren arteko dantza imitatu nahi izan zuten. Ezkerreko dantzaria, erdialdean estutzen den kristalezko dorrea da, zutabe okerrek eutsia. Eskuineko eraikinak, berriz, horma uhindua du, leihoak lerrokatu gabe dauzkana.

Arkitektura deskonstruktibistaren adibide bat da Etxe dantzaria. Deskonstruktibismoak, besteak beste, diseinuaren prozesu ez-lineala eta forma zuzenik gabeko geometria ditu ezaugarri. Horrelako eraikinek kontrolik gabeko kaosa dirudite, arkitektura-arau "tradizionalak" haustea baita arkitektura horren helburua. Nolanahi ere, inguruko arkitektura-estilotik asko aldentzen den arren, Etxe dantzaria oso ondo integratuta dago ingurunean.

Guggenheim Bilbao Museoa

1980. urtean, Bilbo hiria eraberritzeko proiektua jarri zuen abian Eusko Jaurlaritzak, Nerbioi ibaiaren ingurua berritzeko helburuan. Beritze horretan, Guggenheim museoak, Frank O. Gerhy arkitekto estatubatuarrak diseinatuak, garrantzi handia izan zuen. Museoa XX. mendeko arkitektura abangoardistaren adibide argia da, eta Bilbo hiriaren sinbolo bihurtu da.

1993-1997 bitartean eraiki zen, Bilboko ibaiaren ondoan, fabrika zahar, hustu bat zegoen lekuan. Nerbioi ibaiaren maila berean dago, eta hiriaren maila baino 16 m beherago. Hamasei metroko desnibel horri esker, museoak, 50 metro garai delarik, ez ditu inguruko eraikinak gainditzen, eta, forma ondulatua eta kolore distiratsuak eduki arren, guztiz integratzen da ingurunean.

Arrain forman oinarrituriko eraikin horrek ez dio inolako arrazoi geometrikori jarraitzen, ezta beste ezein legeri ere. Bilboko portuko bizimodua eta iraganeko industria irudikatzen ditu erabilitako materialari (titanio eta altzairua) eta formari esker (haize-oihal zabalduak, itsasontziak eta arrain erraldoi bat). Ibaitik ikusita, itsasontzi bat dirudi museoak; goitik ikusita, aldiz, lore itxura du. Eguneko orduaren arabera, kolorea aldatzen du lore horrek: eguerdian, kolore urdinetik distira liluragarrira pasatzen da, eta arratsaldean, aldiz, okretik kolore gorrixkara.

Museoak 11.000 m^2-ko hedadura du erakusketak egiteko, 19 galeriatan banatua. Horietarik, hamarrek forma ortogonala eta itxura klasikoagoa dute, eta harrizko hormak. Beste bederatziak, aldiz, forma irregularrekoak dira, eta titaniozko hormak dituzte. Gela guztiotatik, Arrain galeria da deigarriena; izan ere, 130 metroko luzera eta 30 metroko zabalera ditu, eta zutabe gabekoa da.

Estruktura horren konplexutasun matematikoak zirela eta, kurba ondulatuak diseinatzeko, Catia programa informatikoa baliatu behar izan zuten arkitektoek, eta, hari esker, zehaztu ahal izan zuten zer forma, kokapen eta orientazio izan behar zuen pieza bakoitzak. Programak diseinuaren prozesua erraztu, bizkortu zuen, eta, hartara, aurrekontuak merkatu.

Kareharri, kristal eta titanioz eraikita dago: titaniozko 33.000 pieza erabili ziren, milimetro erdikoak. Pieza bakoitzak forma jakin bat du, lekura egokitua: hain dira meheak piezak, oso ondo egokitzen dira kurba bakoitzera. Haizeak indartsu jotzen duenean, gainazalak bibratu egiten du, eta ondulatu egiten da. Horrek egonkortasun handia ematen du, harriak eman dezakeen baino handiagoa. Kristalak, bestalde, tratamendu berezi bat du: eguzki-izpiak igaro daitezen uzten du, baina beroa sartzea ekiditen. Erabilitako material horiei esker, kutsadurak ez du hiriko beste eraikinak bezain azkar hondatuko.

Munich-eko estadio olinpikoa

Günther Behnisch eta Frei Otto arkitektoek eraiki zuten, han 1972ko Joko Olinpikoak egiteko. Proiektua 1968an hasi, eta 1972an bukatu zuten. Arkitektoen helburua estruktura alai bat eraikitzea zen[2]. Laino bat bezala airean igeri dagoen estruktura bat sortu zuten, Suitzako alpeak irudikatu nahian. Hiru estrukturaz osaturik dago, eta igerilekua, gimnasioa eta estadio nagusia estaltzen ditu; haren inguruan, atletismoko pista bat eta zelai berde bat daude. Kanpin-denda garden horrek 105 $m \times 68$ m-ko dimentsioak ditu, eta 69.250 ikuslerentzako lekua, eta hiriko eraikinik deigarrienetarikoa bihurtu da.

Günther Behnisch eta Frei Otto lehenak izan ziren konputazioan oinarrituriko kalkulu matematikoak erabiltzen. Sistema estrukturalaren kalkuluen zehaztasun handia zela eta, estadiotik kanpo eraiki ziren kanpindenda osatzen duten piezak, eta zehaztasun handi horrek ezinezkoa zirudien estalkia modu erraz batean eraikitzea ahalbidetu zuen.

Gateway Arch (Gateway arkua)

Mendebalderanzko Estatu Batuen hedapenaren omenez eraikitako arkua da; hori dela eta, Gateway to the West (Mendebalderanzko atea) izenaz ere ezagutzen da. Missouri estatuan kokatuta dago, Saint Louis hirian; Mississippi ibaiertzean, hain zuzen.

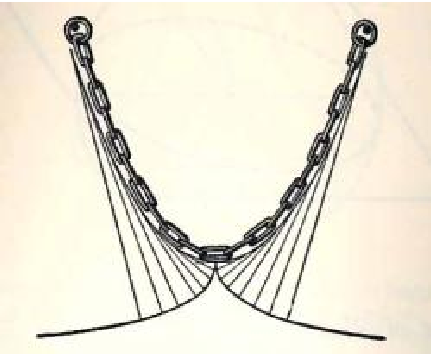
Eero Saarinen estatubatuar arkitektoak (finlandiarra jatorriz) eta Hannskarl Bandel ingeniari alemanak diseinatu zuten 1947. urtean; hala ere, 1963ra arte ez ziren eraikitzen hasi. Lanek bi urte iraun zuten, eta 1967an ireki zen arkua.

Katenaria[3] bat du oinarri Gateway arkuak; buruz

[2] Mendebaldeko Alemaniako gobernuak, historia latz aspaldi gabekoa ahatz zedin nahian, Alemania demokratikoa eta berritua erakutsi nahi zion munduari, joko haien ikurritzak agerian uzten duenez: Die Heiteren Spiele –Joko Alaiak–.

[3] Iduneko bati bi muturretatik helduz gero, idunekoak bere pisuaz sortzen duen arkua da katenaria.

behera jarritako katenaria, hain zuzen (1959an, Gateway arkua eraikitzen hasi aurretik, halako nahasmena eragin zuen arkitektoak arkuaren benetako itxura zelaeta, adierazi zuenean arkua ez zela benetako parabola bat baizik eta katenaria bat).



Baina ez da ohiko katenaria; izan ere, katenaria arruntak lodiera bera du arku osoan zehar, eta Gateway arkuak, berriz, zabalagoak ditu oinarriak goiko aldea baino (katenaria ponderatu alderantzikatua da). Lodiera-aldaketa hori ez zen izan, ordea, Saarinen-ek katenaria mota hori aukeratzeko arrazoia, baizik katenaria arrunta bezain puntazorrotza eta aldapatsua ez izatea.

Oinarriak hiruki aldekideak dira, eta eraikina, 192 metroko garaiera duelarik, Estatu Batuetako eraikinik altuena da. Lurrikarei aurre egiteko prestatuta dago, eta, 240 km/h-ko haizeak jotzen duenean, 23 cm-raino kulunka daiteke edozein norabidetan.

Gaur egun munduko lekurik bisitatuenetariko bat da. Arkuaren goiko aldean, behatokia dago; hara, arkuaren alde bakoitzetik irteten den tranbian edo igogailuan igo daiteke. Behatokiko 32 leihoetatik, Mississippi ibaia, Sain Luis hiria, Illinois hegoaldeko mendiak, Cahokiako aztarnategi arkeologikoa eta abar ikus daitezke.

Erreferentziak

[1] *Arco Gateway*. **Mega Construcciones.net**. `http://megaconstrucciones.net/?construccion=arco-gateway` (kontsulta: 2013ko urriaren 20an)

[2] *Casa Danzante*. **es.wikiarquitectura**. `http://es.wikiarquitectura.com/index.php/Casa_Danzante` (kontsulta: 2013ko urriaren 6an)

[3] *Estadio Olímpico de Munich / Frei Otto*. **Casiopea**. `http://wiki.ead.pucv.cl/index.php/Caso_Estudio_Estadio_Olimpico_de_Munich_/_Frei_Otto_-_Proyecto_Stuttgart_21_-_Sagrada_Familia_/A.Gaudi` (kontsulta: 2013ko azaroaren 11n)

[4] *Fantasiazko eraikinak*. **zientzia.net**. `http://zientzia.net/argazki-galeria/zerrenda/fantasiazko-eraikinak/` (kontsulta; 2013ko irailaren 16an).

[5] *Fantasiazko eraikinen matematika*. **295**. zenbakia. **Elhuyar; zientzia eta teknologia**. `http://aldizkaria.elhuyar.org/gai-nagusiak/fantasiazko-eraikinen-matematika/` (kontsulta: 2013ko irailaren 16an)

[6] C. Gastelum. *Desconstructivismo*. **slidshare**. `http://www.slideshare.net/gasib/deconstructivismo-22499245` (kontsulta: 2013ko urriaren 6an)

[7] *Guggenheim museoa*. **wikiarquitectura**. `http://es.wikiarquitectura.com/index.php/Guggenheim_Bilbao` (kontsulta: 2013ko azaroaren 11n)

[8] C. Serrano. *Casa Danzante*. **minube.com**. `http://www.minube.com/rincon/casa-danzante-a2127` (kontuslta: 2013ko urriaren 6an)

[9] Wikipedia, The Free Encyclopedia. `http://www.wikipedia.org/`

Amaiur Holgado eta **Nahia Agirregoikoa**
Matematikako Lizentziako Ikasleak
UPV/EHU

Stefan Banach

Aitziber Ibañez

Nuestro protagonista de hoy fue uno de los grandes matemáticos del siglo pasado, y tiene el honor de haber sido el matemático más citado en artículos de investigación matemática y física del siglo XX, seguido de Lie y de Riemann. A esto hay que añadirle el mérito de haber desarrollado su trabajo en tiempos de guerra, entre asaltos y piojos, como veremos más adelante, pero también entre cafés, cervezas y colegas.

Figura 1: Stefan Banach.

En marzo de 1892 nace en Cracovia, ciudad perteneciente al Imperio austro-húngaro en aquel momento, Stefan Banach, hijo del soldado Stefan Greczek, de quien recibió el nombre de pila, poco apoyo durante la infancia y nada de adulto. A su madre la rodea cierto misterio, aunque quien aparece en su partida de nacimiento y quien le dio el apellido fue Katarzyna Banach, que trabajaba como criada en la casa de un superior de Greczek. Fuera o no su madre, lo que sí sabemos es que Katarzyna desapareció a los cuatro días del alumbramiento. Stefan Banach nunca más supo de ella, y en respuesta a las preguntas sobre su madre a Greczek, sólo recibió silencio y secretismo. Incluso hay cierta polémica acerca del día de su nacimiento, aunque en su partida figura el 30 de marzo.

Tras un breve periodo al cuidado de su abuela paterna, Grezcek acordó con una lavandera de nombre Franciszka Plowa que ésta se hiciera cargo de su hijo. Junto con Franciszka y su hija María creció Banach, y el tutor de esta última, advirtiendo el talento del niño, se hizo cargo de darle una buena educación académica. En 1910, en el momento que Banach terminó el colegio, y a pesar de su amor por los números, decidió marchar a Leópolis a estudiar ingeniería, pensando que en matemáticas poco había por hacer. Su padre había decidido no ayudarle más económicamente, por lo que Banach tuvo que compaginar estudios y trabajo dando clases, y consiguió terminar los estudios en 1914, un año más tarde de lo planeado.

Fueran cuales fueran sus planes, llegó la Primera Guerra Mundial, y Banach decidió volver a Cracovia, donde siguió ganándose la vida dando clases y comenzó a estudiar matemáticas por su cuenta. Quiso sonreírle la fortuna, y el matemático Hugo Steinhaus, en uno de sus viajes a Cracovia escuchó a Banach discutiendo con Otto Nikodym (un amigo de la infancia) acerca de la integral de Lebesgue, concepto nuevo y que pocos conocían aún. Steinhaus decidió mostrarles un problema que se le atragantaba desde hacía tiempo, y cual fue su sorpresa cuando a los cuatro días Banach fue a buscarle con la solución. Dicho problema acabó convirtiéndose en el primer artículo que escribiría Banach en conjunto con Steinhaus, aunque la guerra retrasó varios años su publicación.

Steinhaus afirmó siempre que el joven Banach fue su mayor descubrimiento matemático, y decidió que Banach volvería con él a Leópolis, donde le consiguió trabajo dando clases y que el matemático Antoni Lomnicki dirigiera su tesis, a pesar de que Banach no se hubiera graduado en matemáticas.

Banach comenzó a obtener pronto resultados brillantes, pero cada vez que le decían que debía de escribir sus descubrimiento y presentar su tesis para obtener el doctorado, él se negaba con la excusa de no estar preparado. Finalmente, las autoridades universitarias decidieron tomar cartas en el asunto y mandaron a alguien poner por escrito y de manera formal los resultados del joven talento, pero quedaba aún por resolver el problema del examen oral que debía pasar. Para ello, y sin previo aviso, tomaron por sorpresa al matemático y le dijeron que tenía que acudir sin falta al despacho del Decano, pues había allí unas personas que querían conocer algunos detalles sobre su trabajo. Banach respondió las preguntas que se le plantearon, sin saber que estaba siendo examinado, y obteniendo así, sin darse

 ISSN 2174-9027

cuenta, su doctorado.

La universidad no era su único lugar de trabajo, ya que gustaba de desarrollar diversos problemas de manera informal en bares y cafés con otros colegas. Cuando cerraban los cafés, iba a menudo a la cafetería de la estación de tren, solo o en compañía, a seguir desarrollando su trabajo cerca de la música y de una buena taza de café.

Los años transcurridos entre la Primera y la Segunda Guerra Mundial fueron la época dorada para los trabajos de Banach, pero en 1939 la Unión Soviética tomó Leópolis, y dos años después lo hicieron los soldados de Hitler. La vida de nuestro matemático se tornó especialmente dura bajo la ocupación alemana. Los nazis tenían en su punto de mira a todos los que tuvieran que ver con la Universidad, ya que estorbaban en su plan de convertir Polonia en un país al servicio de Alemania, sin enseñanza universitaria.

Figura 2: Un *espacio de Banach*.

Curiosamente, Banach se libró por los pelos, y lo hizo sirviendo de alimento para piojos en el laboratorio del doctor Rudolf Weigl. Este famoso médico trabajaba entonces en una vacuna contra el tifus, enfermedad que diezmó muchos ejércitos durante la Segunda Guerra Mundial (y en general, en todas las guerras de cualquier época), por lo que los alemanes tenían especial interés en el trabajo de Weigl, y le concedieron muchos privilegios. Los piojos eran el principal agente de transmisión de este virus en los ejércitos (donde la higiene brillaba por su ausencia), por lo que eran objeto de estudio para el médico. Estos odiosos parásitos se alimentan exclusivamente de sangre humana, por lo que, aprovechando este pretexto, Weigl contrataba a muchos profesores de la universidad como alimentadores de piojos, Banach entre ellos, salvándolos así de estar en el punto de mira de los nazis, ya que la Gestapo prefería no tener contacto con sujetos que hubieran podido contaminarse accidentalmente de tifus en el laboratorio.

Durante este periodo se publicó la monografía escrita por Banach, *Théorie des opérations linéaires*, que muchos consideran como el comienzo del análisis funcional. Curiosamente, libro que terminaba muchas veces en la sección de medicina de las librerías de Leópolis.

Tras finalizar la guerra en 1945, Leópolis pasó a formar parte de Ucrania, que a su vez pertenecía a la URSS. A Banach le fue ofrecida una cátedra en Uniwersytet Jagielloński de Cracovia, pero desgraciadamente la salud del matemático se vio muy resentida por la guerra, y murió el 31 de agosto de ese mismo año en Leópolis.

Stefan Banach es considerado el padre del análisis funcional, y multitud de teoremas y conceptos llevan su nombre, como los espacios de Banach, a pesar de que no todo su trabajando llegó a ser publicado. Incluso había quien decía que a este matemático deberían de haberle seguido en todo momento dos personas apuntando todo lo que decía. Podemos encontrar en Cracovia un busto del matemático e incluso una calle con su nombre, un auténtico *espacio de Banach*.

Referencias

[1] K. Ciesielski. *On Stefan Banach and some of his results*. **Banach Journal of mathematical Analysis**. Vol. **1**. Num. **1**. 2007. Págs. 1-147. `http://projecteuclid.org/euclid.bjma/1240321550`.

[2] M. López Pellicer. *Banach*. **Historia de la Matemática**. 1998. Págs. 221-270. `http://dmle.cindoc.csic.es/revistas/detalle.php?numero=5188`

[3] M.A. Morales. *El cuaderno escocés*. **gaussianos**. `http://gaussianos.com/el-cuaderno-escoces/`

[4] R.A. Nowlan. *Stefan Banach*. **A Chronicle of Mathematical People**. `http://www.robertnowlan.com/pdfs/Banach,%20Stefan.pdf`

[5] J.J. O'Connor y E.F. Robertson. *Stefan Banach*. **The MacTutor History of Mathematics archive**. `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach.html`

[6] S. Parra. *Se busca alimentador de piojos*. **Xatakaciencia**. `http://www.xatakaciencia.com/biologia/se-busca-alimentador-de-piojos-1-de-2`

[7] S. Parra. *El cuaderno escocés*. **Xatakaciencia**. `http://www.xatakaciencia.com/matematicas/el-cuaderno-escoces-1-de-2`

[8] Wikipedia, The Free Encyclopedia. `http://www.wikipedia.org/`

Aitziber Ibañez
Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas
UPV/EHU

Txominen Sariketa

1. buruketaren ebazpena/Solución del problema 1

Irabazleak/Ganadores

1. **Ebazpen dotoreena/Solución más elegante:** Iván Esteban Muñoz (3º Fis.)
2. **Ebazpen originalena/Solución más original:** Ander Garro Abrain (3º Fis.)
3. **Hobekien idatzitako ebazpena/Solución mejor redactada:** Ander Gonzalez de Txabarri (1º Fis.)
4. **Accesita/Accésit:** Manu Alfonso (1º Mat.)

Zorionak! Joan zaitezte Marta Machoren bulegora (beheko pisua, eskuineko lehen atea)./¡Felicidades! Pasaos por el despacho de Marta Macho (planta baja, primera puerta a la derecha).

Ebazpena/Solución

Consider the bags A with 5 white balls and one black ball, B with 4 white and 2 black balls and C with 3 white and 3 black balls. Call:

- E the event "to take a white ball of the last bag",
- F the event "to take a white ball and a black ball of the two first bags",
- A^* the event "the last bag is A", B^* the event "the last bag is B" and C^* the event "the last bag is C",
- N_A the event "to take a black ball of A", B_A the event "to take a white ball of A", N_B the event "to take a black ball of B", B_B the event "to take a white ball of B", N_C the event "to take a black ball of C" and B_C the event "to take a white ball of C".

With the usual notations, we have:

$$P(F/A^*) = P((N_B \cap B_C) \cup (B_B \cap N_C)) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{18}{36},$$

$$P(F/B^*) = P((N_A \cap B_C) \cup (B_A \cap N_C)) = \frac{5}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{18}{36},$$

$$P(F/C^*) = P((N_A \cap B_B) \cup (B_A \cap N_B)) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{14}{36}.$$

Thus

$$P(F) = P(F/A^*)P(A^*) + P(F/B^*)P(B^*) + P(F/C^*)P(C^*) =$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{18}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{18}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{14}{36} = \frac{1}{3} \times \frac{50}{36} = \frac{50}{108} = \frac{25}{54}.$$

To calculate $P(E \cap F)$, we compute the probability to take a white ball if the last bag is A (analogously with B y C):

$$P(E \cap F/A^*) = P(((N_B \cap B_B) \cup (B_B \cap N_C)) \cap B_A)$$

$$= \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{18}{36} \times \frac{5}{6},$$

$$P(E\cap F/B^*) = \frac{18}{36}\times\frac{4}{6} \quad P(E\cap F/C^*) = \frac{14}{36}\times\frac{3}{6}.$$

Therefore

$$P(E\cap F) = \frac{1}{3}\times P(E\cap F/A^*) + \frac{1}{3}\times P(E\cap F/B^*) + \frac{1}{3}\times P(E\cap F/C^*) =$$
$$\left(\frac{18}{36}\times\frac{5}{6}+\frac{18}{36}\times\frac{4}{6}+\frac{14}{36}\times\frac{3}{6}\right)\times\frac{1}{3} = \frac{51}{162}.$$

and the dsired result is

$$P(E/F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{51}{162}}{\frac{25}{54}} = \frac{17}{25} = 0,68.$$

Txomin Zukalaregi

2. buruketa

Epearen bukaera: 2013-12-13

Pertsona batzuk ilaran daude. Haietako bakoitzak ilarako hurrengoak baino euro bat gehiago dauka. Lehenak bigarrenari euro bat ematen dio; bigarrenak, hirugarrenari bi euro, eta, horrela, pertsona bakoitzak, hurrenez hurren, ilarako aurreko pertsonarengandik jaso duen baino euro bat gehiago ematen dio hurrengoari; azkenak izan ezik: honek zaku batean ipintzen ditu jaso dituen euroak gehi bat gehiago. Prozesu hori errepikatu egiten da, harik eta ezin jarraitu arte. Zakuak lehen pertsonak baino lau aldiz euro gehiago badauzka, zenbat pertsona daude ilaran eta zenbat diru zeukan bakoitzak prozesua hasi baino lehenago?

Sariak:

1. Ebazpen dotoreena: 20 txikle eta elastiko matematiko bat.
2. Ebazpen originalena: 20 txikle eta matematikari buruzko dibulgazio-liburu bat.
3. Hobekien idatzitako ebazpena: 20 txikle eta “Un paseo por la geometría”-ren pack bat.

Zorte on!
Txomin Zukalaregi

Problema 2

Fin de convocatoria: 13-12-2013

Un cierto número de personas se coloca en fila: la primera tiene un euro más que la segunda, que tiene un euro más que la tercera, etc. La primera persona pasa a la segunda 1 euro, la segunda pasa a la tercera 2, y así, sucesivamente, cada persona pasa a la siguiente en la fila 1 euro más de los que ha recibido, hasta llegar a la última que mete lo que ha recibido más un euro en un saco. El juego sigue hasta que resulte imposible continuarlo. Se sabe que en este momento, el saco contiene 4 veces más dinero que la primera persona. ¿Cuántas personas hay en la fila y cuánto dinero tenía cada una de ellas?

Premios:

1. Solución más elegante: 20 chicles y una camiseta matemática.
2. Solución más original: 20 chicles y un libro de divulgación matemática.
3. Solución mejor redactada: 20 chicles y un pack de “Un paseo por la geometría”.

¡Buena suerte!
Txomin Zukalaregi

2. buruketaren ebazpena/Solución del problema 2

Irabazleak/Ganadores

1.Ebazpen dotoreena/Solución más elegante: Daniel García (1º Biot.)

2. Ebazpen originalena/Solución más original: Sergio Narbona (2º Fis.)

3. Hobekien idatzitako ebazpena/Solución mejor redactada: Mikel Álvarez (2º Fis.)

4. Accesita/Accésit: Alex Martínez Ascensión (1º Bioqu.)

Eskerrik asko parte hartzeagatik/Gracias por participar: Jon Aldekoa, Erik Ardeo, Leonardo Galleguillos, Ander Garro, Ander González, Iñigo Robredo eta/y Manuel Santos

Zorionak! Joan zaitezte Marta Machoren bulegora (E.S1.1)./¡Felicidades! Pasaos por el despacho de Marta Macho (E.S1.1).

Ebazpena/Solución

Suppose there are m people, the last one with k euros. The following list explains the problem, where P_i is the i-th person, B is the bag and E_i is the amount of euros in the i-th turn:

	P_1	P_2	$\dots$	P_{m-1}	P_m	B
E_0	$k+m-1$	$k+m-2$	$\dots$	$k+1$	k	0
E_1	$k+m-2$	$k+m-3$	$\dots$	k	$k-1$	m
E_2	$k+m-3$	$k+m-4$	$\dots$	$k-1$	$k-2$	$2m$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
E_{k-1}	m	$m-1$	$\dots$	2	1	$(k-1)m$
E_k	$m-1$	$m-2$	$\dots$	1	0	km

In the final moment, the bag contains the quadruple of euros than P_1, so:

$$4(m-1) = km,$$

that is, $(4-k)m = 4$, with k and m intergers. So, we have the following possibilities:

1) $4-k=1$ and $m=4$, that is $k=3$ and $m=4$: 4 people with 3, 4, 5 and 6 euros.

2) $4-k=2$ and $m=2$, that is $k=2$ and $m=2$: 2 people with 2 and 3 euros.

3) $4-k=4$ and $m=1$, is not possible because $0=4(m-1)\neq km=8$.

Txomin Zukalaregi

3. buruketa

Epemuga: 2014-3-14

Demagun honako zifra bateko zenbaki arrunt hauek ditugula: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 eta 9; eta batuketa ($+$), biderketa ($\times$) eta berreketa (ˆ) eragiketak. Operazio horien bidez zifra bateko n zenbaki konbinatuz, zein da lortu ahal den zenbaki arruntik handiena? Eta modu horretan ezin idatz daitekeen txikiena?

Oharra: Bigarren galderan, ez da espero erantzun zehatza, baizik eta borneak edo estimazioak.

Sariak:

1. Ebazpen dotoreena: 20 txikle eta elastiko matematiko bat.
2. Ebazpen originalena: 20 txikle eta matematikari buruzko dibulgazio-liburu bat.
3. Hobekien idatzitako ebazpena: 20 txikle eta “Un paseo por la geometría” liburuen sorta bat.

Zorte on!
Txomin Zukalaregi

Problema 3

Fin de convocatoria: 14-3-2013

Consideremos los números naturales de una cifra (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) y las operaciones de suma ($+$), producto ($\times$) y potenciación (ˆ), ¿cuál es el número natural más grande que se puede escribir combinando n números de una cifra mediante las operaciones citadas? ¿Y el más pequeño que no se puede escribir de esta manera?

Nota: En la segunda pregunta, no se espera una respuesta exacta, sólo cotas o estimaciones.

Premios:

1. Solución más elegante: 20 chicles y una camiseta matemática.
2. Solución más original: 20 chicles y un libro de divulgación matemática.
3. Solución mejor redactada: 20 chicles y un pack de “Un paseo por la geometría”.

¡Buena suerte!
Txomin Zukalaregi